**Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο**
**Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών**
**Τομέας Ρευστών**
**Μηχανική των Ρευστών-Άσκηση 12**
**Ακαδημαϊκό έτος 2007-2008**

Λύση

Α) Το πεδίο ροής είναι μόνιμο, επομένως οι τροχιές είναι και γραμμές ροής του πεδίο και αντίστροφα.

Οι ροϊκές συναρτήσεις των δύο στοιχειωδών πεδίων είναι αντίστοιχα:

$$\Psi_1 = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r, \quad \Psi_2 = -\frac{e}{2\pi}\varphi \qquad \Gamma > 0 \ , \ e > 0 \tag{1}$$

Επομένως η ροϊκή συνάρτηση του επάλληλου πεδίου είναι,

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r - \frac{e}{2\pi}\varphi \qquad \Gamma > 0 \ , \ e > 0 \tag{2}$$

Οι γραμμές ροής είναι γραμμές σταθερής τιμής της ροϊκής συνάρτησης $\Psi_o$. Επομένως η εξίσωση των γραμμών ροής είναι:

$$-\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r - \frac{e}{2\pi}\varphi = \Psi_o \tag{3}$$

ή επιλύοντας ως προς r,

$$r = e^{-\frac{2\pi\Psi_o + e\varphi}{\Gamma}} \tag{4}$$

Ζητούμε την τροχιά που περνάει από το σημείο (r=$r_o$, φ=0). Έτσι έχουμε $r_o = e^{-\frac{2\pi\Psi_o}{\Gamma}}$, οπότε τελικά η ζητούμενη τροχιά έχει την εξίσωση,

$$r = r_o\, e^{-\frac{e\varphi}{\Gamma}} \tag{5}$$

Αριθμητική εφαρμογή για $r_o = 1\mathrm{m}$ , $\Gamma = 2\pi\ \mathrm{m^2/s}, \quad e = 4\ \mathrm{m^2/s}$

$$r = e^{-\frac{2\varphi}{\pi}} \tag{6}$$

Β) Η παροχή ανά μονάδα βάθους του πεδίου δίνεται από τη σχέση,

$$\frac{\dot{V}}{b} = \left|\Psi_2 - \Psi_1\right| \tag{7}$$

Οι τιμές των ροϊκών συναρτήσεων των γραμμών ροής που περνούν από τα σημεία $(r_1, \varphi_1)$, $(r_2, \varphi_2)$ προκύπτουν από την εξίσωση (2) οπότε έχουμε,

$$\frac{\dot{V}}{b} = \left|\Psi_2 - \Psi_1\right| = \left| -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r_2 - \frac{e}{2\pi}\varphi_1 + \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r_1 + \frac{e}{2\pi}\varphi_2 \right| \tag{8}$$

<u>Αριθμητική εφαρμογή</u> για $(r_1, \varphi_1) = (1\text{m}, 0)$, $(r_2, \varphi_2) = (1\text{m}, \pi/2)$

$$\frac{\dot{V}}{b} = \left|\Psi_2 - \Psi_1\right| = \frac{e}{4} = 1\,\text{m}^2/\text{s} \tag{9}$$

Γ) Δεν υπάρχει σημείο ανακοπής διότι το ένα πεδίο έχει περιφερειακές ταχύτητες το δε άλλο ακτινικές ταχύτητες.

Δ) Εάν προστεθεί και το πεδίο παράλληλης ροής ταχύτητας U, τότε το πεδίο των ταχυτήτων είναι,

$$\upsilon_{\varphi 1} = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad \upsilon_{r2} = -\frac{e}{2\pi r}, \quad u_3 = U \tag{10}$$

Οι u, v συνιστώσες του επάλληλου πεδίου ροής είναι

$$u = -\upsilon_{\varphi 1}\sin\varphi + \upsilon_{r2}\cos\varphi + u_3 = -\frac{\Gamma}{2\pi r}\sin\varphi - \frac{e}{2\pi r}\cos\varphi + U \tag{11}$$

και

$$v = \upsilon_{\varphi 1}\cos\varphi + \upsilon_{r2}\sin\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi r}\cos\varphi - \frac{e}{2\pi r}\sin\varphi \tag{12}$$

Ζητώντας το σημείο ανακοπής μηδενίζουμε τις εκφράσεις των u, v συνιστωσών της ταχύτητας, u=0, v=0, οπότε από την (12) με v=0 προκύπτει,

$$\tan\varphi = \frac{\Gamma}{e} \tag{13}$$

Ακολούθως με αντικατάσταση της (13) στην (11) και με u=0 προκύπτει,

$$r = \frac{e}{2\pi U}\sqrt{1 + \left(\frac{\Gamma}{e}\right)^2} \tag{14}$$

<u>Αριθμητική εφαρμογή</u> για $\Gamma = 2\pi\ \text{m}^2/\text{s}$, $e = 4\ \text{m}^2/\text{s}$ , U=1 m/s

$$\tan\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = 57{,}51 \qquad r = \frac{2}{\pi}\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = 1{,}18\text{m} \tag{15}$$

Ε) Η ταχύτητα στο επάλληλο πεδίο ροής δίνεται από τη σχέση,

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_{\varphi 1}^2 + \upsilon_{r2}^2} = \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2\pi r}\right)^2 + \left(-\frac{e}{2\pi r}\right)^2} \tag{16}$$

Οπότε τα ζητούμενα σημεία ευρίσκονται επάνω σε περιφέρεια κύκλου ακτίνας,

$$r = \frac{1}{2\pi\upsilon}\sqrt{\Gamma^2 + e^2} \tag{17}$$

Αριθμητική εφαρμογή για $\upsilon = 2m/s$, $\Gamma = 2\pi\ m^2/s$, $e = 4\ m^2/s$. Προκύπτει:

$$r = \frac{\sqrt{4+\pi^2}}{2\pi} = 0,593 \tag{18}$$