Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Μηχανική των Ρευστών-Άσκηση 13
Ακαδημαϊκό έτος 2007-2008

<u>Λύση</u>

Η σχέση των πιέσεων $\frac{p_e}{p_o} = \frac{6.8}{7} = 0.972 \overset{\Pi 21.1}{\Rightarrow} M_e = 0.20\ ,\ \frac{E_e}{E^*} = 2.9635,\ \frac{\Theta_e}{\rho_o c_o} = 0.1953$
$\Rightarrow E^* = 16.87\,\mathrm{cm}^2$

Από τις εξισώσεις του τελείου αερίου: $\rho_o c_o = \frac{p_o}{R\,T_o}\sqrt{\gamma R\,T_o} = \frac{p_o\sqrt{\gamma}}{\sqrt{R\,T_o}} = 2304.7\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^2 s}}$

Επομένως: $\dot{m} = \Theta_e E_e = 0.1953 \cdot 2304.7 \cdot 50 \cdot 10^{-4} = 2.2505\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$,

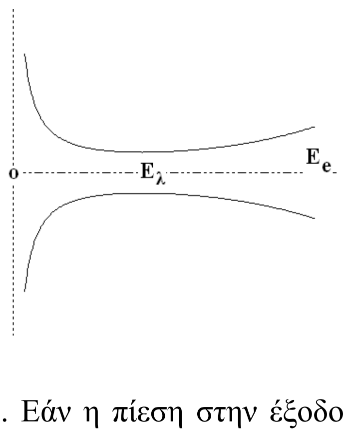
$$\boxed{\dot{m} = 2.2505\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}}$$

Είναι όμως στο λαιμό $M_\lambda = 0.7 \overset{\Pi 21.1}{\Rightarrow} \frac{E_\lambda}{E^*} = 1.0944,\ \frac{\Theta_\lambda}{\rho_o c_o} = 0.5288 \Rightarrow E_\lambda = 18.46\,\mathrm{cm}^2$

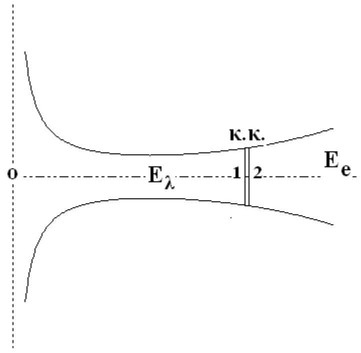
$$\boxed{E_\lambda = 18.46\,\mathrm{cm}^2}$$

<u>Σημείωση:</u> Στο ίδιο αποτέλεσμα για την παροχή μάζας καταλήγουμε εάν υπολογίσουμε την παροχή μάζας στην διατομή του λαιμού:

$$\dot{m} = \Theta_\lambda E_\lambda = 0.5288 \cdot 2304.7 \cdot 18.46 \cdot 10^{-4} = 2.2498\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$$



2. Εάν η πίεση στην έξοδο του συγκλίνοντος – αποκλίνοντος ακροφυσίου (Laval) μειωθεί τότε αυξάνει η παροχή στο ακροφύσιο μέχρι η ταχύτητα στο λαιμό να φθάσει την ηχητική ταχύτητα, οπότε και η παροχή μάζας φθάνει στο μέγιστο. Εάν εξακολουθήσει η πίεση στην έξοδο να μειώνεται τότε στο αποκλίνον τμήμα του ακροφυσίου επικρατεί στη αρχή υπερηχητική ροή και στη συνέχεια δημιουργείται κάθετο κύμα κρούσης που οδηγεί σε υποηχητική ροή μέχρι την έξοδο. Αυτή είναι και η περίπτωση που ισχύει για τη δεδομένη πίεση εξόδου $p_e = 4\,\mathrm{bar}$.



1ος τρόπος επίλυσης

Εάν συμβολισθεί με τον δείκτη 1 η υπερηχητική κατάσταση πριν από το κάθετο κύμα κρούσης και με 2 η υποηχητική κατάσταση μετά το κάθετο κύμα κρούσης τότε μπορεί να καταρτισθούν οι παρακάτω πίνακες 1, 2 και 3 στους οποίους με δοκιμές ευρίσκεται η πραγματική κατάσταση.
Η διαδικασία είναι η εξής: Επιλέγονται δυνατές υπερηχητικές καταστάσεις 1 ($M_1 = 1.8$, 2.0, 2.2) οπότε συμπληρώνονται με τη βοήθεια του πίνακα Π21.1 του κεφαλαίου του βιβλίου για την ισεντροπική ροή από τη θέση ανακοπής (δοχείο πίεσης) στην θέση 1 του ακροφυσίου οι στήλες 2 έως 5 του **πίνακα 1:**

Πίνακας 1: Ισεντροπική υπερηχητική ροή από την κατάσταση 0 στην 1				
M_1	p_1/p_{1o}	E_1/E_λ	p_1(bar)	E_1(cm^2)
1.8	0.1740	1.4390	1.218	26.55
2.0	0.1278	1.6875	0.8946	31.15
2.2	0.0935	2.005	0.6545	37.01

Ακολούθως με την βοήθεια του πίνακα Π21.2 του κεφαλαίου 21 του βιβλίου για το κάθετο κύμα κρούσης ευρίσκεται η κατάσταση 2 μετά το κύμα κρούσης και συμπληρώνονται οι στήλες 2 και 7 του **πίνακα 2**:

Πίνακας 2: Καταστάσεις 1 και 2 εκατέρωθεν του καθέτου κύματος κρούσης						
M_1	M_2	p_2/p_1	p_{2o}/p_{1o}	p_2(bar)	p_{2o}(bar)	p_e/p_{2o}
1.8	0.6165	3.6133	0.8127	1.4010	5.6889	0.7031
2.0	0.5774	4.5	0.7209	4.0257	5.0463	0.7926
2.2	0.5471	5.48	0.6281	3.5867	4.3967	0.9098

Στη συνέχεια υπολογίζεται με τη βοήθεια του πίνακα 21.1 του 21^{ου} κεφαλαίου του βιβλίου η ισεντροπική, υποηχητική ροή από την κατάσταση 2 μετά το κύμα κρούσης μέχρι την έξοδο e του ακροφυσίου και συμπληρώνεται ο **πίνακας 3**:

Πίανκας 3: Ισεντροπική υποηχητική ροή από την κατάσταση 2 στην e				
p_2/p_{2o}	$E_1/\hat{E}^*$	$\hat{E}^*$	$E_e/\hat{E}^*$	p_e/p_{2o}
0.7736	1.1656	22.78	2.194	0.947
0.7977	1.213	25.68	1.947	0.934
0.8157	1.2549	29.49	1.695	0.9098

Από τους πίνακες παρατηρούμε ότι η κατάσταση $M_1 = 2.2$, $\boxed{E_1 = 37.01\text{cm}^2}$ οδηγεί στη δεδομένη κατάσταση με πίεση εξόδου $p_e = 4\,\text{bar}$, δεδομένου ότι συμπίπτει η τιμή του λόγου p_e / p_{2o} στις τελευταίες στήλες των πινάκων 2 και 3.
Από τον πίνακα Π21.1 (υποηχητική ροή) για την ευρεθείσα τιμή $p_e / p_{2o} = 0.9098$ προκύπτει $T_e / T_{2o} = 0.9733\ (M_e = 0.37)$. Είναι όμως $T_{2o} = T_{1o} = T_o = 450\text{K}$ οπότε η ζητούμενη θερμοκρασία στην έξοδο ευρίσκεται ότι είναι $\boxed{T_e = 438\,\text{K}}$.

<u>2ος τρόπος επίλυσης</u>

Εκφράζουμε βάσει των γνωστών από τη θεωρία ισεντροπικών σχέσεων την παράσταση $\dfrac{p_e E_e}{\hat{p}_o \hat{E}^*}$ συναρτήσει του αριθμού Mach M_e στην έξοδο του ακροφυσίου:

$$\frac{p_e E_e}{\hat{p}_o \hat{E}^*} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \left[\frac{2}{\gamma + 1}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2\right)\right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} = \frac{125}{216} \frac{1}{M_e (1 + 0.2 M_e^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{1}$$

Η παροχή μάζας είναι ενιαία πριν και μετά το κύμα κρούσης επομένως,

$$\dot{m} = E^* \rho^* c^* = \hat{E}^* \hat{\rho}^* \hat{c}^* \ . \tag{2}$$

Από τη σχέση (2) με την βοήθεια των σχέσεων,

$$T^* = \hat{T}^*, \quad p^* = R \rho^* T^*, \quad \hat{p}^* = R \hat{\rho}^* \hat{T}^*, \quad c^* = \sqrt{\gamma R T^*}, \quad \hat{c}^* = \sqrt{\gamma R \hat{T}^*} \tag{3}$$

προκύπτει η σχέση,

$$E^* p^* = \hat{E}^* \hat{p}^* \tag{4}$$

και με τη βοήθεια της σχέσης,

$$\frac{p_o}{p^*} = \frac{\hat{p}_o}{\hat{p}^*} = \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma + 1}} \tag{5}$$

προκύπτει

$$E^* p_o = \hat{E}^* \hat{p}_o \tag{6}$$

Τελικά από τις (1) και (6) προκύπτει,

$$\frac{p_e E_e}{p_o E^*} = \frac{125}{216} \frac{1}{M_e (1 + 0.2 M_e^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Συμβολίζοντας με Α την παράσταση $A \equiv \dfrac{125\ p_o E^*}{216\ p_e E_e}$ προκύπτει μια αλγεβρική εξίσωση με άγνωστο τον M_e: $0.2\ M_e^4 + M_e^2 - A^2 = 0$ με λύση (απορρίπτεται η αρνητική λύση),

$M_e^2 = \dfrac{-1+\sqrt{1+0.8A^2}}{0.4}$. Από αριθμητική εφαρμογή με δεδομένα $p_o = 7\,\text{bar},\ \ p_e = 4\,\text{bar},\ \ E^* = 18.46\,\text{cm}^2,\ E_e = 50\,\text{cm}^2$ προκύπτει, Α=0.3739 και $\boxed{M_e = 0.37}$.