ΑΣΚΗΣΗ 1

Δεδομένο πεδίο ταχυτήτων: $u = 1, \quad v = 6\,x\,t$

1) **Επιτάχυνση του πεδίου ροής** : $\Rightarrow$ εξισώσεις (3.10) έως (3.12c) του βιβλίου

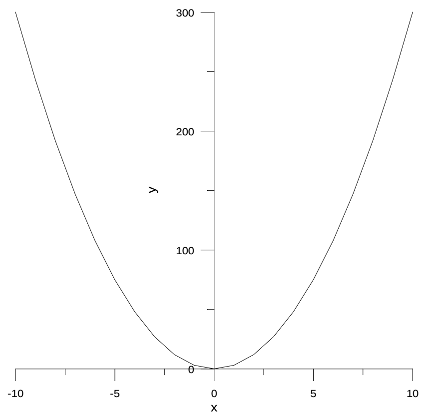
$$b_x = u_t + u\,u_x + v\,u_y = 0$$
$$b_y = v_t + u\,v_x + v\,v_y = 6x + 6t$$

2) **Εξισώσεις γραμμών ροής** : $\Rightarrow$ εξισώσεις (3.17) του βιβλίου

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad (t=t_0) \text{ ή } \quad \frac{dx}{1} = \frac{dy}{6\,x\,t} \quad (t=t_0)$$

$dy = 6\,x\,t\,dx \;\Rightarrow \quad y = 3\,x^2\,t + c$ (1) (κάθε χρονική στιγμή $t = t_0$ σε κάθε τιμή της c αντιστοιχεί μία γραμμή ροής)

Για t =1 η (1) γίνεται $y = 3\,x^2 + c$. Η ζητούμενη γραμμή ροής θα διέρχεται από το σημείο (1, 3). Οι συντεταγμένες του σημείου αυτού θα ικανοποιούν συνεπώς την εξίσωση αυτή. Από τη συνθήκη αυτή προσδιορίζεται η τιμή της c για τη ζητούμενη γραμμή ροής σε c=0. Αρα η ζητούμενη γραμμή ροής έχει εξίσωση $y = 3\,x^2$.
Η φορά της γραμμής ροής προσδιορίζεται από τη φορά της ταχύτητας σε κάποιο σημείο της. Αφού η u είναι πάντα θετική, προκύπτει ότι η φορά της γραμμής ροής είναι από αριστερά προς τα δεξιά.



3) Η κίνηση κάθε στοιχείου του ρευστού γίνεται πάνω στην **τροχιά** του, η εξίσωση της οποίας προκύπτει από τις εξισώσεις (3.6) του βιβλίου :

$$Dx = u\,Dt \;\Rightarrow\; Dx = Dt \;\Rightarrow\; x = t + k_1 \qquad (2)$$
$$Dy = v\,Dt \;\Rightarrow\; Dy = 6\,x\,t\,Dt = 6\,(t + k_1)\,t\,Dt \;\Rightarrow\; y = 2\,t^3 + 3\,k_1 t^2 + k_2 \qquad (3)$$

Οι εξισώσεις (2) & (3) δίνουν κάθε χρονική στιγμή t τη θέση (x,y) του στοιχείου του ρευστού που αντιστοιχεί στις παραμέτρους k_1 & k_2. Το στοιχείο που τη χρονική στιγμή t=1 βρίσκεται στη θέση P(1, 2) αντιστοιχεί στις παραμέτρους

$k_1 = x - t = 1 - 1 = 0$, $k_2 = y - 2t^3 - 3k_1 t^2 = 2 - 2\cdot 1 - 0 = 0$. Αρα η τροχιά του συγκεκριμμένου στοιχείου δίνεται από τις εξισώσεις : $x = t$, $y = 2t^3$. Τη χρονική στιγμή t=4 το στοιχείο αυτό βρίσκεται στη θέση (x,y)=(4, 128).

4) **Εξίσωση κίνησης** ονομάζεται η εξίσωση που δίνει κάθε χρονική στιγμή t τη θέση $\vec{r}$ του στοιχείου, το οποίο τη στιγμή t_0 βρισκόταν στη θέση $\vec{R}$ (εξίσωση (3.1) του βιβλίου). Εχουν προσδιορισθεί ήδη οι εξισώσεις (2) και (3). Για $t=t_0$ και (x=X, y=Y) προκύπτει από αυτές : $k_1 = X - t_0$, $k_2 = Y - 2t_0^3 - 3(X - t_0)t_0^2$. Αρα η εξίσωση κίνησης, μετά από αντικατάσταση και εκτέλεση πράξεων, δίνεται από τις σχέσεις:

$$x = t + (X - t_0), \quad y = 2t^3 + 3(X - t_0)t^2 + (Y - 3Xt_0^2 + t_0^3) \qquad (4)$$

Το **πεδίο ταχυτήτων** εκφρασμένο κατά **Lagrange** δίνει την ταχύτητα για κάθε χρονική στιγμή t του συγκεκριμμένου στοιχείου του ρευστού (X,Y). Αν λοιπόν αντικαταστήσουμε την εξίσωση κίνησης (4) στην έκφραση του πεδίου ταχυτήτων κατά Euler, προκύπτει το ζητούμενο πεδίο :

$$u = 1 \quad , \quad v = 6[t + (X - t_0)]t$$

5) Ζητείται εκείνη η γραμμή, στο χώρο (x,y) κατά τη χρονική στιγμή t=3, σε κάθε σημείο της οποίας βρίσκεται κάποιο στοιχείο ρευστού που κάποια χρονική στιγμή τ (από 0 ως 3) πέρασε από τη θέση (0,0). Αν στην εξίσωση (4) αντικαταστήσω t_0=τ και (X, Y)=(0, 0), θα πάρω την εξίσωση κίνησης των ως άνω στοιχείων:

$$x = t - \tau \quad , \quad y = 2t^3 - 3\tau\, t^2 + \tau^3 \qquad (5)$$

Οι εξισώσεις (5) δίνουν κάθε στιγμή t τη θέση των στοιχείων που τη χρονική στιγμή τ πέρασαν από τη θέση (0, 0). Τα στοιχεία αυτά τη στιγμή t=3 βρίσκονται στη θέση:

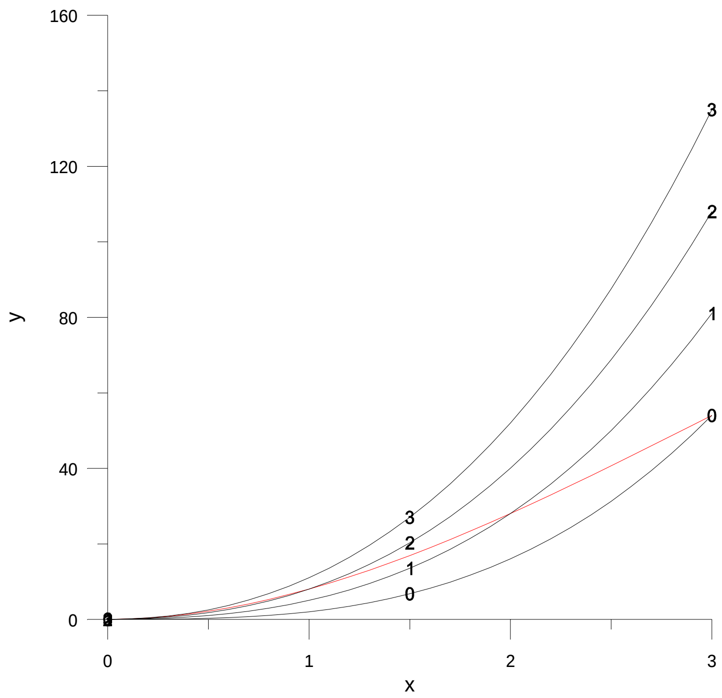
$$x = 3 - \tau \ , \quad y = 54 - 27\tau + \tau^3$$

Απαλοίφοντας το τ προκύπτει η εξίσωση της ζητούμενης **γραμμής εκπομπής**: $y = 9x^2 - x^3$ (κόκκινη καμπύλη του σχήματος)
Από τις εξ. (5) με απαλοιφή του t παίρνω την εξίσωση της τροχιάς του στοιχείου που τη στιγμή τ πέρασε από τη θέση (0, 0):

$$y = 2x^3 + 3\tau x^2$$

Για τ=0, 1, 2, 3 παίρνω τις αντίστοιχες τροχιές:

$$y = 2x^3$$
$$y = 2x^3 + 3x^2$$
$$y = 2x^3 + 6x^2$$
$$y = 2x^3 + 9x^2$$


160
120
80
40
0
y
0
1
2
3
x
3
2
1
0
3
2
1
0