ΑΣΚΗΣΗ 10

a) Θεωρούμε τη ροή αξονικά συμμετρική και διαμορφωμένη, οπότε η επίλυση του προβλήματος ακολουθεί την ίδια διαδικασία απλοποίησης των εξισώσεων Navier – Stokes σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιήθηκε στην διαμορφωμένη ροή σε σωλήνα κυκλικής διατομής (Βιβλίο ΜΡ, σελ. 159-160) οπότε προκύπτουν οι γενικές σχέσεις:

$$p(z) = k\,z + k_1 \qquad (1)$$

$$\upsilon_z(r) = \frac{k}{4\mu} r^2 + k_2 \ln r + k_3 \qquad (2)$$

Στην γενική λύση εισάγονται οι <u>οριακές συνθήκες</u> του συγκεκριμένου προβλήματος που είναι για την <u>πίεση</u> σύμφωνα με την εκφώνηση ότι οι πιέσεις στις διατομές $z = 0$, $z = \ell$ είναι ίδιες,

$$p(0) = p(\ell)$$

οπότε από την εξίσωση (1) προκύπτει: k=0.

Από τις <u>οριακές συνθήκες μη ολίσθησης</u> στο ακίνητο και κινούμενο τοίχωμα που είναι:

$$\upsilon_z(R_o) = 0, \quad \upsilon_z(R_i) = U$$

προκύπτουν με αντικατάσταση στην σχέση (2) οι τιμές των σταθερών k_2, k_3 :

$$k_2 = -\frac{U}{\ln\left(\frac{R_o}{R_i}\right)}, \quad k_3 = U\frac{\ln R_o}{\ln\left(\frac{R_o}{R_i}\right)}$$

Οπότε η τελική έκφραση για την ταχύτητα είναι:

$$\boxed{\upsilon_z(r) = U\frac{\ln\left(\frac{R_o}{r}\right)}{\ln\left(\frac{R_o}{R_i}\right)}}$$

b) Η συνολική δύναμη η ασκούμενη στα τοιχώματα οφείλεται στην εφαρμογή τόσο τη εσωτερικής πίεσης από το ρευστό όσο και στις διατμητικές τάσεις. Η εσωτερική πίεση δρά κάθετα στην επιφάνεια και ακτινικά και επομένως η συνολική εφαρμοζόμενη από την σταθερή πίεση δύναμη είναι συνολικά μηδενική. Οι διατμητικές τάσεις είναι μηδενικές εκτός από την τ_{rz}, η οποία υπολογίζεται:

$$\tau_{rz} = \mu\frac{\partial \upsilon_z}{\partial r} = -\mu\, U \frac{1}{\ln\left(\frac{R_o}{R_i}\right)}\frac{1}{r}$$

Στο εξωτερικό τοίχωμα $r = R_o$ η διατμητική τάση είναι:

$$\tau_w(R_o) = -\tau_{rz}(R_o) = \mu U \frac{1}{\ln\left(\frac{R_o}{R_i}\right)} \frac{1}{R_o}$$

Επομένως η συνολική δύναμη που ασκεί το ρευστό στο εξωτερικό ακίνητο τοίχωμα ανέρχεται σε:

$$\boxed{K_{w,R_o} = 2\pi R_o \ell \tau_w(R_o) = 2\pi\ell\mu U \frac{1}{\ln\left(\frac{R_o}{R_i}\right)} > 0}$$

Στο εσωτερικό τοίχωμα $r = R_i$ η διατμητική τάση είναι:

$$\tau_w(R_i) = \tau_{rz}(R_i) = -\mu U \frac{1}{\ln\left(\frac{R_o}{R_i}\right)} \frac{1}{R_i}$$

Επομένως η συνολική δύναμη που ασκεί το ρευστό στο εσωτερικό ακίνητο τοίχωμα ανέρχεται σε:

$$K_{w,R_i} = 2\pi R_i \ell \tau_w(R_i) = -2\pi\ell\mu U \frac{1}{\ln\left(\frac{R_o}{R_i}\right)} < 0$$

Επομένως η δύναμη που K_κ πρέπει να επιβληθεί στο κινούμενο τοίχωμα για να κινείται με σταθερή ταχύτητα U είναι αντίθετη ($K_\kappa = -K_{w,R_i}$)

$$\boxed{K_\kappa = 2\pi\ell\mu U \frac{1}{\ln\left(\frac{R_o}{R_i}\right)} > 0}$$

c) Αριθμητική εφαρμογή:

$$\boxed{K_{w,R_o} / \ell = \pi\ 0.002\,\mathrm{N/m}, \qquad K_\kappa / \ell = \pi\ 0.002\,\mathrm{N/m}}$$