ΑΣΚΗΣΗ 2

Πεδίο ταχυτήτων : u=1 , v=6xt

1) Ενα στοιχείο του ρευστού, κινούμενο στο πεδίο ταχυτήτων μεταφέρεται, περιστρέφεται και παραμορφώνεται συγχρόνως. Η παραμόρφωση μπορεί να είναι γραμμική (όταν αλλάζουν τα μήκη των πλευρών του στοιχείου) ή γωνιακή (όταν αλλάζουν οι γωνίες του στοιχείου). Η παραμόρφωση εκφράζεται με τον πίνακα $\vec{D}$ (εξίσωση 3.27 του βιβλίου), ενώ η περιστροφή με τον πίνακα $\vec{R}$ (εξίσωση 3.27 του βιβλίου). Οι τανυστές αυτοί είναι :
2)

$$\vec{D} = \begin{bmatrix} u_x & \frac{1}{2}\left(v_x + u_y\right) & \frac{1}{2}\left(u_z + w_x\right) \\ \frac{1}{2}\left(v_x + u_y\right) & v_y & \frac{1}{2}\left(v_z + w_y\right) \\ \frac{1}{2}\left(u_z + w_x\right) & \frac{1}{2}\left(v_z + w_y\right) & w_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\left(v_x - u_y\right) & \frac{1}{2}\left(u_z - w_x\right) \\ \frac{1}{2}\left(v_x - u_y\right) & 0 & -\frac{1}{2}\left(w_y - v_z\right) \\ -\frac{1}{2}\left(u_z - w_x\right) & \frac{1}{2}\left(w_y - v_z\right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

όπου $\vec{\omega}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του στοιχείου, που έχει συνιστώσες (ω_χ , ω_y , ω_z).

Τα στοιχεία της πρώτης διαγωνίου του πίνακα παραμόρφωσης (u_x , v_y , w_z) δίνουν τη γραμμική παραμόρφωση, ενώ τα άλλα δίνουν τη γωνιακή παραμόρφωση.

Στο δεδομένο πεδίο ταχυτήτων προκύπτει :

$$u_x = 0 \quad u_y = 0 \quad u_z = 0 \quad v_x = 6t \quad v_y = 0 \quad v_z = 0$$

$$\vec{D} = \begin{bmatrix} 0 & 3t & 0 \\ 3t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Αρα τα στοιχεία του ρευστού υφίστανται γωνιακή μόνο παραμόρφωση.

Ο πίνακας περιστροφής προκύπτει : $\vec{\vec{R}} = \begin{bmatrix} 0 & -3t & 0 \\ 3t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Αρα τα στοιχεία του ρευστού περιστρέφονται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}(0,0,\omega_z) = (0,0,3t)$ γύρω από άξονα περιστροφής παράλληλο στον άξονα z.

Σύμφωνα με τη σχέση (3.37) του βιβλίου, αστρόβιλο καλείται το πεδίο που έχει $\vec{\omega} = 0$, άλλως καλείται στροβιλό. Συνεπώς το πεδίο μας είναι στροβιλό.

3) Σε στροβιλά πεδία δεν εισάγεται η έννοια του δυναμικού.

4) Σε ασυμπίεστο ρευστό είναι : $\operatorname{div}\vec{\upsilon} = 0$ (παραγρ. 4.1.3 του βιβλίου). Προκύπτει : $\operatorname{div}\vec{\upsilon} = u_x + v_y + w_z = 0$. Αρα οι δεδομένες σχέσεις μπορούν να συνιστούν πεδίο ροής ασυμπίεστου ρευστού. Το πεδίο ταχυτήτων είναι διδιάστατο. Σύμφωνα με της εξίσωση (4.10α) του βιβλίου η ροϊκή συνάρτηση Ψ ορίζεται από τις σχέσεις :

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

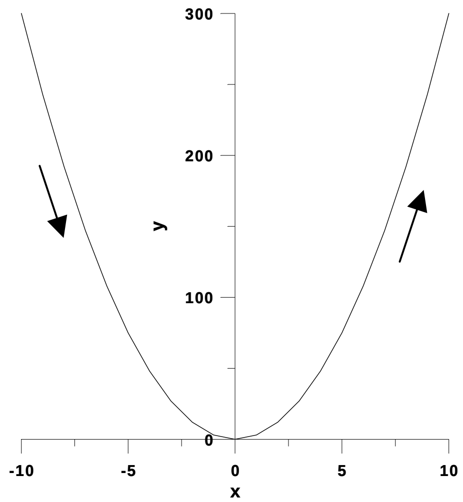
Αφού δίδεται u=1, προκύπτει :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 1 \quad \rightarrow \quad \Psi = y + f(x) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{df}{dx}.$$

Είναι όμως

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -v = -6xt \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = -6xt \quad \rightarrow \quad f(x) = -3x^2 t + c.$$

Αρα $\Psi = y - 3x^2 t + c$. Κάθε γραμμή ροής χαρακτηρίζεται από μία τιμή της Ψ. Μπορεί συνεπώς η σταθερά c να ενσωματωθεί με την τιμή της Ψ, ώστε να έχουμε την απλούστερη μορφή $\Psi = y - 3x^2 t$. Τη χρονική στιγμή t=1 οι γραμμές ροής εκφράζονται με τη ροϊκή συνάρτηση $\Psi_1 = y - 3x^2$. Σε κάθε τιμή της Ψ_1 αντιστοιχεί μία γραμμή ροής (Πρόταση 1 Κεφ. 4.1.4). Για να περνάει κάποια Γ.Ρ. από το σημείο (1, 3) θα πρέπει οι συντεταγμένες του να ικανοποιούν τη σχέση αυτή. Αντικαθιστώντας στην $\Psi_1 = y - 3x^2$ τις συντεταγμένες (x=1, y=3) προκύπτει Ψ_1=0. Αρα η ζητούμενη γραμμή ροής έχει εξίσωση $0 = y - 3x^2$.

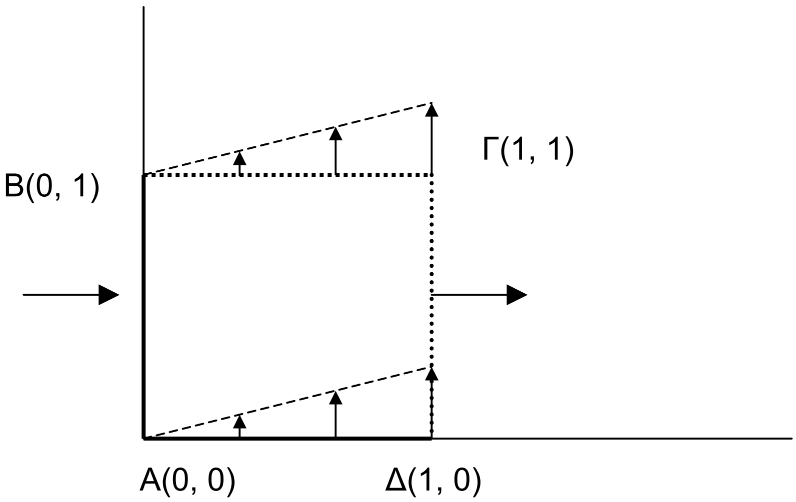


4) Σύμφωνα με την εξίσωση 4.8 του βιβλίου, ορίζεται η παροχή μέσω μιας επιφάνειας Ε. Στην περίπτωσή μας, λόγω του διδιάστατου πεδίου, η επιφάνεια Ε είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές αφ ενός την ευθεία που συνδέει τα σημεία K(1, 3) και M(2, 6) και αφ ετέρου (κάθετα στο επίπεδο του σχήματος) τη μονάδα μήκους. Σύμφωνα με την Πρόταση 2 του Κεφ. 4.1.4, η ζητούμενη παροχή είναι : $\Psi_1(\mathrm{K}) = 3 - 3 \cdot 1^2 = 0$. Είναι όμως και $\Psi_1(\mathrm{M}) = 6 - 3 \cdot 2^2 = -6$. Αρα προκύπτει

$$\frac{\dot{\mathrm{V}}}{\mathrm{b}} = \left|\Psi_1(\mathrm{K}) - \Psi_1(\mathrm{M})\right| = \left|0 - (-6)\right| = 6\,.$$

Σημειώνεται ότι οι μονάδες της παροχής προκύπτουν από τις μονάδες ταχύτητας και μήκους.

5)



Η ολοκληρωματική διατύπωση της εξίσωσης διατήρησης της μάζας στη γενική της μορφή έχει τη μορφή της εξ. (4.6) του βιβλίου. Στην περίπτωσή μας όμως που το πεδίο είναι ασυμπίεστο, θα χρησιμοποιηθεί η μορφή

$$\int_{E} \vec{\upsilon} \cdot \vec{n} dE = 0 \qquad (1)$$

του Πίνακα του Κεφ. 4.1.3. Ως επιφάνεια Ε έχουμε το τετράγωνο ΑΒΓΔ βάθους 1. Το διάνυσμα $\vec{n}$ είναι το μοναδιαίο κάθετα στις πλευρές, το δε γινόμενο $\vec{\upsilon} \cdot \vec{n}$ είναι η κάθετη στην εκάστοτε πλευρά συνιστώσα της ταχύτητας. Η (1) αναλύεται ως εξής:

$$\int_{E} \vec{\upsilon} \cdot \vec{n} dE = \int_{AB} \vec{\upsilon} \cdot \vec{n} dE + \int_{B\Gamma} \vec{\upsilon} \cdot \vec{n} dE + \int_{\Gamma\Delta} \vec{\upsilon} \cdot \vec{n} dE + \int_{\Delta A} \vec{\upsilon} \cdot \vec{n} dE = 0$$

Η απλουστευτική και πλέον παραστατική μέθοδος είναι να σημειώνουμε σε κάθε πλευρά τις κάθετες συνιστώσες της ταχύτητας, οι οποίες συμβάλλουν στην αύξηση ή μείωση της παροχής. Ετσι στην ΑΒ η κάθετη ταχύτητα είναι η u που έχει σταθερή τιμή 1 και είναι εισερχόμενη στον όγκο ΑΒΓΔ. Στην πλευρά ΔΓ η κάθετη ταχύτητα είναι επίσης η u=1 αλλά είναι εξερχόμενη. Οι δύο πλευρές είναι ίσες, συνεπώς η εισερχόμενη παροχή είναι ίση με την εξερχόμενη,δηλαδή $\int_{AB} \vec{\upsilon} \cdot \vec{n} dE + \int_{\Gamma\Delta} \vec{\upsilon} \cdot \vec{n} dE = 0$. Στην ΑΔ η κάθετη ταχύτητα είναι η v(=6xt), που είναι ανεξάρτητη του y και είναι εισερχόμενη στον όγκο ΑΒΓΔ. Στην απέναντι πλευρά ΒΓ η κάθετη ταχύτητα είναι επίσης η v(=6xt), αλλά είναι εξερχόμενη. Οι δύο πλευρές είναι ίσες, συνεπώς η εισερχόμενη παροχή είναι ίση με την εξερχόμενη, δηλαδή $\int\limits_{\mathrm{A\Delta}} \vec{\upsilon}\cdot\vec{n}dE + \int\limits_{\mathrm{B\Gamma}} \vec{\upsilon}\cdot\vec{n}dE = 0$.

Προκύπτει τελικά $\int\limits_{\mathrm{AB}} \vec{\upsilon}\cdot\vec{n}dE + \int\limits_{\mathrm{B\Gamma}} \vec{\upsilon}\cdot\vec{n}dE + \int\limits_{\mathrm{\Gamma\Delta}} \vec{\upsilon}\cdot\vec{n}dE + \int\limits_{\mathrm{\Delta A}} \vec{\upsilon}\cdot\vec{n}dE = 0$.

Αυστηρά μαθηματικά η λύση εκφράζεται ως εξής:

$$\int\limits_{E} \vec{\upsilon}\cdot\vec{n}dE = \int\limits_{\mathrm{AB}} \vec{\upsilon}\cdot\vec{n}dE + \int\limits_{\mathrm{B\Gamma}} \vec{\upsilon}\cdot\vec{n}dE + \int\limits_{\mathrm{\Gamma\Delta}} \vec{\upsilon}\cdot\vec{n}dE + \int\limits_{\mathrm{\Delta A}} \vec{\upsilon}\cdot\vec{n}dE =$$

$$\int\limits_{y=0}^{y=1} (-u)\,bdy + \int\limits_{x=0}^{x=1} vbdx + \int\limits_{y=0}^{y=1} ubdy + \int\limits_{x=0}^{x=1} (-v)\,bdx =$$

$$-by\Big|_{y=0}^{y=1} + \int\limits_{x=0}^{x=1} 6xtbdx + -by\Big|_{y=0}^{y=1} \int\limits_{x=0}^{x=1} 6xtbdx = 0$$