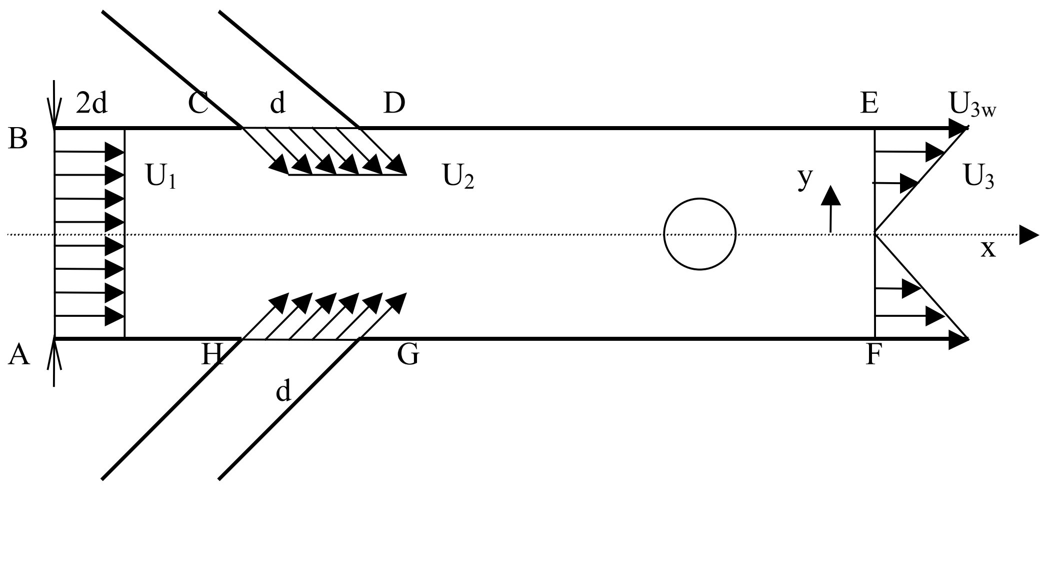
ΑΣΚΗΣΗ 3

Οταν σε πεδίο ροής υπάρχει ακίνητο στερεό σώμα (Κ) και ζητείται να υπολογισθεί η δύναμη που ασκείται από το ρευστό στο σώμα (ή το αντίστροφο), χρησιμοποιείται η ολοκληρωματική μορφή της εξίσωσης διατήρησης της ορμής (Κεφ. 4.2). Η εξίσωση εφαρμόζεται σε ακίνητη κλειστή νοητή επιφάνεια Ε, την οποία επιλέγουμε έτσι ώστε:

- να μην περιέχεται σαυτήν άλλο σώμα από το (Κ)
- στις πλευρές της να είναι γνωστές (ή να μπορούν να υπολογισθούν) οι ταχύτητες και οι πιέσεις.

Η δύναμη θα βρεθεί υπολογίζοντας τις συνιστώσες της ως προς άξονες x, y, z τους οποίους ορίζουμε κατά τρόπο που να διευκολυνόμαστε στον υπολογισμό και την έκφραση των ταχυτήτων και των πιέσεων.

1) Στην περίπτωσή μας το πεδίο ροής είναι διδιάστατο. Αρα η επιφάνεια Ε θα είναι διδιάστατη, βάθους b=1m, και θα έχει πλευρές τα ευθύγραμμα τμήματα AB, BE, EF, FA. Ορίζουμε ως άξονα x τον άξονα του αγωγού και τον άξονα y κάθετο στον x.



Η διανυσματική ολοκληρωματική διατύπωση του θεωρήματος της ορμής δίνεται από τις εξισώσεις (4.25) $\frac{d\vec{J}}{dt}+\vec{S}=\vec{G}+\vec{F}_S-\vec{K}$ και (4.26) του βιβλίου.

Το πεδίο ροής θεωρείται μόνιμο. Αρα $\frac{d\vec{J}}{dt} = 0$.

Οι δυνάμεις βαρύτητας αμελούνται. Αρα $\vec{G} = 0$

Το ρευστό είναι μή συνεκτικό. Αρα η επιφανειακή δύναμη $\vec{F}_S$ οφείλεται μόνο στις πιέσεις πάνω στην επιφάνεια Ε, δηλαδή $\vec{F}_S = \vec{F}_p$.

Τελικά η (4.25) γίνεται:

$$\vec{S} = \vec{F}_p - \vec{K}. \tag{1}$$

Είναι, σύμφωνα με την (4.26):

$$\vec{S} = \int_E \rho\vec{\upsilon}(\vec{\upsilon}\cdot\vec{n})dE = \int_{AB} \rho\vec{\upsilon}(\vec{\upsilon}\cdot\vec{n})dE + \int_{BE} \rho\vec{\upsilon}(\vec{\upsilon}\cdot\vec{n})dE + \int_{EF} \rho\vec{\upsilon}(\vec{\upsilon}\cdot\vec{n})dE + \int_{FA} \rho\vec{\upsilon}(\vec{\upsilon}\cdot\vec{n})dE$$

και

$$\vec{F}_p = -\int_E p\,\vec{n}\,dE = \int_{AB} p\,\vec{n}\,dE + \int_{BE} p\,\vec{n}\,dE + \int_{EF} p\,\vec{n}\,dE + \int_{FA} p\,\vec{n}\,dE$$

Το $\vec{n}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετα στο στοιχείο dE της επιφάνειας, με κατεύθυνση προς τα έξω της Ε. Το εσωτερικό διάνυσμα $(\vec{\upsilon}\cdot\vec{n})$ είναι η συνιστώσα της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ κάθετα στο στοιχείο dE, και είναι θετική όταν η ροή εξέρχεται από την Ε.

Στην περίπτωσή μας είναι γνωστές οι ταχύτητες στις πλευρές ΑΒ, ΒΕ, FA, ενώ μπορεί να υπολογισθεί η διανομή της ταχύτητας στην EF, κάνοντας χρήση της **εξίσωσης διατήρησης της μάζας** με την ολοκληρωματική της διατύπωση

$$\int_E \vec{\upsilon}\cdot\vec{n}dE = 0$$

$$\int_{AB} \vec{\upsilon}\cdot\vec{n}dE + \int_{BE} \vec{\upsilon}\cdot\vec{n}dE + \int_{EF} \vec{\upsilon}\cdot\vec{n}dE + \int_{FA} \vec{\upsilon}\cdot\vec{n}dE = 0$$

$$(-\upsilon_1)(2d)b + (-\upsilon_2\sin\theta)(d)b + \int_{EF} \vec{\upsilon}\cdot\vec{n}dE + (-\upsilon_2\sin\theta)(d)b = 0$$

$$\int_{EF} \vec{\upsilon}\cdot\vec{n}dE = 2\int_{y=0}^{y=d} \frac{y}{d}\upsilon_{3w}b(dy) = \upsilon_{3w}b$$

$$\upsilon_{3w} = 2\upsilon_1 + 2\upsilon_2\sin\theta = \cdots = 6\sqrt{2}\ \text{m/s}$$

Εκφράζουμε την **εξίσωση της ορμής** (1) κατά την διεύθυνση x:

$$S_x = F_{px} - K_x \tag{2}$$

<u>Υπολογισμός της ροής της ορμής S_x:</u>

$$S_x = \int_{AB} \rho\vec{\upsilon}_x(\vec{\upsilon}\cdot\vec{n})dE + \int_{BE} \rho\vec{\upsilon}_x(\vec{\upsilon}\cdot\vec{n})dE + \int_{EF} \rho\vec{\upsilon}_x(\vec{\upsilon}\cdot\vec{n})dE + \int_{FA} \rho\vec{\upsilon}_x(\vec{\upsilon}\cdot\vec{n})dE =$$

$$= \rho\int_{y=0}^{y=2d} \upsilon_1(-\upsilon_1)bdy + \rho\int_{x=0}^{x=d} (\upsilon_2\cos\theta)(-\upsilon_2\sin\theta)bdx$$

$$+2\rho\int_{y=0}^{y=d} \upsilon_3\upsilon_3 bdy + \rho\int_{x=0}^{x=d} (\upsilon_2\cos\theta)(-\upsilon_2\sin\theta)bdx$$

Αντικαθιστώντας $\upsilon_3 = \frac{6\sqrt{2}}{d}y$ και τις τιμές που δίνονται $\upsilon_1 = 2\sqrt{2}\ \text{m/s}$, $\upsilon_2 = 2\,\text{m/s}$ προκύπτει μετά την εκτέλεση πράξεων S_x=28 ρ b d = 2800 N .

<u>Υπολογισμός της επιφαενιακής δύναμης πίεσης</u> F_{px}

F_{px} είναι η συνιστώσα κατά τη διεύθυνση x της δύναμης που ασκείται πάνω στην επιφάνεια Ε λόγω των πιέσεων του ρευστού που βρίσκεται έξω από την Ε. Σημειώνεται ότι η πίεση είναι πάντα κάθετη στην επιφάνεια και ασκείται από έξω προς τα μέσα.

$$F_{px} = -\int_{E} p\, n_x \, dE = \int_{AB} p\, n_x \, dE + \int_{BE} p\, n_x \, dE + \int_{EF} p\, n_x \, dE + \int_{FA} p\, n_x \, dE$$

Ετσι, επειδή οι πλευρές BE και AF της E είναι παράλληλες στον άξονα x, η δύναμη από πιέσεις πάνω σαυτές είναι κάθετη στον άξονα x και συνεπώς δεν έχει συνιστώσα κατά τη διεύθυνση x ($n_x = 0$).

Πάνω στην επιφάνεια AB η πίεση είναι σταθερή p_1 και $n_x = -1$. Αρα η δύναμη που αναπτύσσεται είναι ίση με p_1 b (2 d).

Πάνω στην επιφάνεια EF η πίεση είναι σταθερή p_3 και $n_x = 1$. Αρα η δύναμη που αναπτύσσεται είναι ίση με -p_3 b (2 d).

Αρα $F_{px} = (p_1 - p_3)\, b\, 2\, d = 4000$ N

Αντικαθιστώντας στην (2) προκύπτει :

K_x= 4000-2800 = 1200 N. $\boxed{K_x = 1200\,\mathrm{N}}$

2) Λόγω συμμετρίας του αγωγού ως προς τον άξονα x, από την οποία συνάγεται ότι και η πίεση στις διατομές CD, HG είναι ίδια, προκύπτει ότι $\boxed{K_y = 0}$.