ΑΣΚΗΣΗ 4

Επιλέγουμε κλειστή επιφάνεια αναφοράς Ε (βάθους b=1) που να περιλαμβάνει το σώμα (εδώ τον αγωγό), πάνω στο οποίο ασκείται η δύναμη που ψάχνουμε, και να περνά από θέσεις όπου είναι γνωστές οι ταχύτητες και οι πιέσεις, δηλαδή από τα A, B, D, C (θα μπορούσε να είναι η επιφάνεια που στο σχήμα είναι η διακεκομένη γραμμή) .

Οι ταχύτητες στη διατομή εξόδου BD δίνονται από τις σχέσεις u=1 v=x/2, η δε πίεση είναι ίση με την πίεση περιβάλλοντος p_a=10000.

Στη διατομή AC είναι γνωστή η ταχύτητα u=1 v=0, η δε πίεση είναι άγνωστη.

Στις υπόλοιπες πλευρές της Ε επικρατεί η πίεση περιβάλλοντος.

Αρα υπάρχει ανάγκη, για να εφαρμοσθεί το θεώρημα ορμής, να υπολογισθεί η πίεση σε κάθε σημείο της AC. Οι πιέσεις συνδέονται με τις ταχύτητες μέσω της εξίσωσης Bernoulli (6.43), στην οποία η «σταθερά» k μπορεί να είναι διαφορετική από γραμμή ροής σε γραμμή ροής όταν το πεδίο είναι στροβιλό ($\mathrm{rot}\,\vec{\upsilon} \neq 0$). Είναι όμως $\mathrm{rot}\,\vec{\upsilon} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$. Σε διδιάστατο πεδίο προκύπτει : $\mathrm{rot}\,\vec{\upsilon} = \vec{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$. Στο πεδίο ροής της Ασκησης προκύπτει: $\mathrm{rot}\,\vec{\upsilon} = \frac{1}{2}\vec{k} \neq 0$ (στροβιλό πεδίο). Αρα η **εξίσωση Bernoulli ισχύει μεταξύ σημείων που βρίσκονται πάνω στην ίδια γραμμή ροής**. Οι γραμμές ροής θα βρεθούν αν βρεθεί η ροϊκή συνάρτηση Ψ.

$$\Psi_y = u \ , \ \Psi_x = -v$$

$$\Psi_y = 1 \ \Rightarrow \ \Psi = y + f(x) \ \Rightarrow \ \Psi_x = f_x(x) = -v = -x/2 \ \Rightarrow$$

$$f(x) = -x^2/4 \ \Rightarrow \ \Psi = y - x^2/4$$

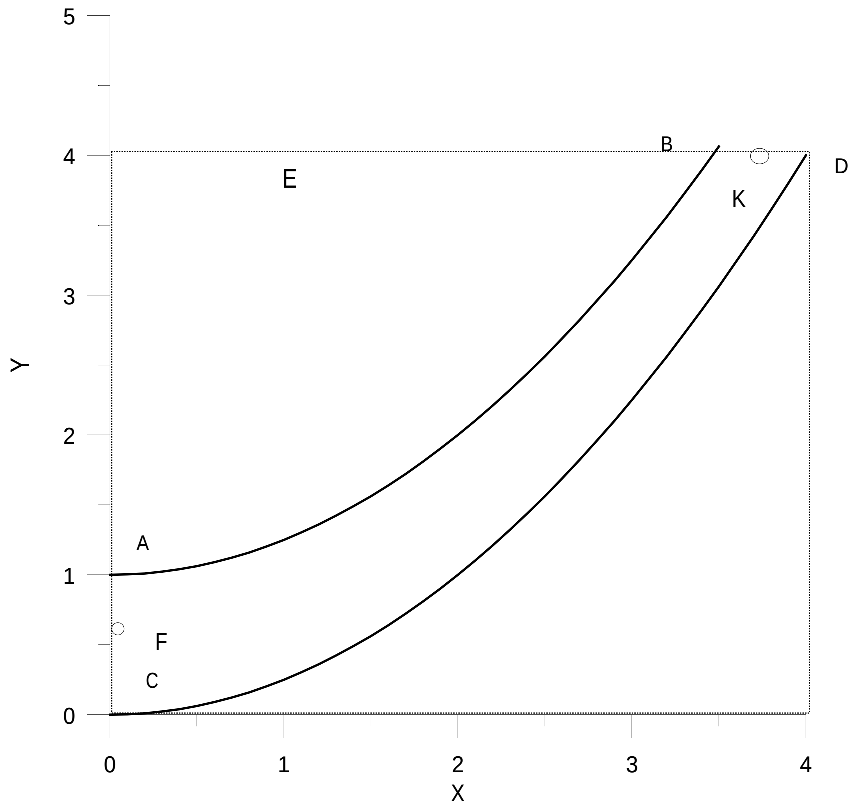
Κάθε τιμή Ψ αντιστοιχεί σε μία παραβολή $y = x^2/4 + \Psi$ που παριστά μια γραμμή ροής. Τα τοιχώματα είναι γραμμές ροής. Η τιμή Ψ που αντιστοιχεί σε κάθε τοίχωμα προκύπτει από την τιμή που παίρνει η παράσταση $-x^2/4 + y$ σε ένα σημείο του τοιχώματος. Ετσι προκύπτει :

Για το A(0, 1) : $\Psi(A)=1 \Rightarrow y = x^2/4 + \Psi(A)= x^2/4 +1$

Για το C(0, 0): $\Psi(C) =0 \Rightarrow y = x^2/4 + \Psi(C)= x^2/4$

Για το τυχόν σημείο F(0, h): $\Psi(F)=h \Rightarrow y = x^2/4 + \Psi(F)= x^2/4 +h$

Στη διατομή εξόδου BD (που έχει y=4) τα σημεία B, D, K βρίσκονται πάνω στις γραμμές ροής που περνούν από τα σημεία A, C, F αντίστοιχα. Προκύπτει συνεπώς: $x_K= 2\sqrt{4-h}$ και αντίστοιχα: $x_B = 2\sqrt{3}$, $x_D = 4$.



Εφαρμόζοντας την <u>εξίσωση Bernoulli</u> μεταξύ των θέσεων F & K έχουμε:

$$p_F + \frac{\rho}{2}\upsilon_F^2 = p_K + \frac{\rho}{2}\upsilon_K^2$$

Οι ταχύτητες όμως στις θέσεις αυτές υπολογίζονται και είναι:

$$\upsilon_F^2 = u_F^2 + v_F^2 = 1+0 \qquad \upsilon_K^2 = u_K^2 + v_K^2 = 1+\left(\frac{x_K}{2}\right)^2 = 1+(4-h) = 5-h$$

Αρα προκύπτει:

$$p_F + \frac{\rho}{2}\cdot 1 = p_K + \frac{\rho}{2}(5-h) \quad \Rightarrow \quad p_F = p_K + \frac{\rho}{2}(4-h) = p_a + \frac{\rho}{2}(4-h) \qquad (h = 0-1)$$

Εχοντας πλέον γνωστές και τις πιέσεις πάνω στην Ε, εφαρμόζω το θεώρημα της ορμής:

$$K_x = P_x - S_x \qquad K_y = P_y - S_y$$

$$S_x = -\rho \cdot 1 \cdot 1 + \rho \int_B^D 1 \cdot \frac{x}{2} \cdot dx = -\rho + \rho \left. \frac{x^2}{4} \right|_{2\sqrt{3}}^{4} = \rho\left(-1 + 4 - 3\right) = 0$$

$$S_y = 0 + \rho \int_B^D \frac{x}{2}\frac{x}{2} dx = \rho \left. \frac{x^3}{12} \right|_{2\sqrt{3}}^{4} = \rho \frac{1}{12}\left(64 - 24\sqrt{3}\right)$$

Οσον αφορά στον υπολογισμό της δύναμης λόγω πιέσεων πάνω στην Ε πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι παντού η πίεση είναι p_a εκτός από τη διατομή CA, όπου είναι p_F. Συνεπώς η δύναμη λόγω πιέσεων προκύπτει μόνο από την (p_F- p_a) πάνω στη CA.

$$P_x = \int_C^A \left(p_F - p_a\right) dy = \frac{\rho}{2} \int_0^1 \left(4 - y\right) dy = \frac{\rho}{2} \left. \left(4y - \frac{y^2}{2}\right) \right|_0^1 = \frac{7\rho}{4}$$

$$P_y = 0$$

Προκύπτει τελικά :

$$K_x = \frac{7\rho}{4} = \frac{7000}{4} = 1750 \text{ N}$$

$$K_y = 0 - \frac{\rho}{12}\left(64 - 24\sqrt{3}\right) = -1869 \text{ N}$$