ΑΣΚΗΣΗ 5

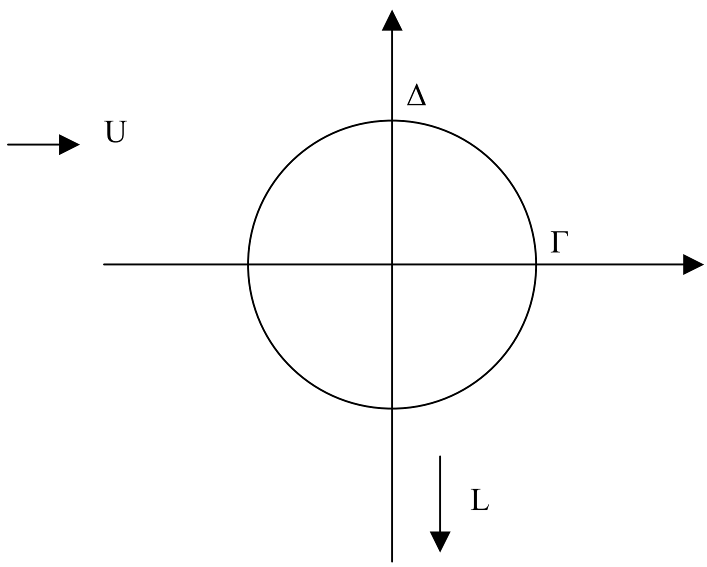
Αφού ο κύλινδρος δέχεται δύναμη, προκύπτει ότι το πεδίο ροής είναι επαλληλία ενός διπόλου και μιας δίνης μέσα στην παράλληλη ροή. Στην περίπτωση αυτή η ροϊκή συνάρτηση και οι ταχύτητες δίνονται από τις σχέσεις:

$$\Psi = \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) U\, r \sin\varphi - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

$$\upsilon_r = U\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\cos\varphi$$

$$\upsilon_\varphi = -U\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\sin\varphi + \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Πάνω στον κύλινδρο υπάρχει μόνο η ταχύτητα υ_φ που είναι ίση με: $\left(\upsilon_\varphi\right)_{r=R} = -2U\sin\varphi + \frac{\Gamma}{2\pi R}$. Στα σημεία Γ και Δ , όπου αντίστοιχα είναι $\varphi_\Gamma=0$ και $\varphi_\Delta=90^o$, οι ταχύτητες είναι $\upsilon_{\varphi\Gamma}=\Gamma/(2\pi R)$, $\upsilon_{\varphi\Delta}=-2U+ \Gamma/(2\pi R)$. Δίνεται ότι οι πιέσεις στα σημεία αυτά είναι ίσες. Επειδή το πεδίο είναι αστρόβιλο προκύπτει ότι και οι ταχύτητες είναι ίσες (Bernoulli). Αρα προκύπτει $\upsilon_{\varphi\Gamma}= \upsilon_{\varphi\Delta}=-2U+ \Gamma/(2\pi R)= \Gamma/(2\pi R)$ $\Rightarrow U= \Gamma/(2\pi R)$ ή $\Gamma=2\,\pi\,R\,U$



Η δύναμη ανά μονάδα βάθους του πεδίου που δέχεται ο κύλινδρος δίνεται από τη σχέση : L/b= -ρ U Γ. Αντικαθιστώντας την έκφραση της Γ προκύπτει : L/b= - ρU Γ= -ρ 2πR U^2 $\Rightarrow$ U^2= -(L/b)/(2πRρ).

Δεδομένου ότι L/b= - 200π N/m, $\Rightarrow$ $\boxed{U = 1\,m/s}$ και $\Gamma = 0.2\,\pi\,m^2/s$

Τα σημεία ανακοπής βρίσκονται στη θέση φ_o, όπου $\sin\varphi_o = \dfrac{\Gamma}{4\pi R U} = 0.5$. Αρα

$\boxed{\varphi_o = 30^o \text{ και } 150^o}$.

Β) $\left(\upsilon_\varphi\right)_{r=R} = -2U\sin\varphi + \dfrac{\Gamma}{2\pi R} = -2\sin\varphi + 1$. Η μεταβολή της ταχύτητας, καθώς και του τετραγώνου αυτής, πάνω στον κύλινδρο συναρτήσει της φ φαίνεται στο κατωτέρω σχήμα. Προκύπτει στη θέση φ=270^o (ή -90^o) η ταχύτητα γίνεται μέγιστη, με τιμή $(\upsilon_R)_{max}$= 3m/s. Το τετράγωνο της ταχύτητας γίνεται ελάχιστο (μηδέν) στις θέσεις φ=30^o και 150^o: $(\upsilon_R)_{min}$= 0.

Για τον υπολογισμό της πίεσης εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli μεταξύ ενός σημείου σε πολύ μεγάλη απόσταση (στο άπειρο), όπου η ταχύτητα είναι U και η πίεση p_∞.

$$p_\infty + \frac{\rho}{2}U^2 = p_R + \frac{\rho}{2}\upsilon_R^2$$

$$p_R = p_\infty + \frac{\rho}{2}U^2 - \frac{\rho}{2}\upsilon_R^2$$

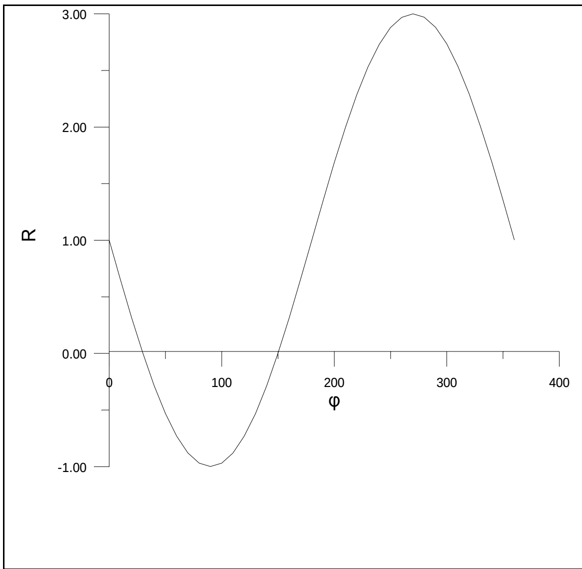
$$\left(p_R\right)_{max} = p_\infty + \frac{\rho}{2}U^2 - \frac{\rho}{2}(\upsilon_R^2)_{min} = p_\infty + \frac{\rho}{2}U^2 = 1500\,Pa$$

$$\left(p_R\right)_{min} = p_\infty + \frac{\rho}{2}U^2 - \frac{\rho}{2}(\upsilon_R^2)_{max} = -3000\,Pa$$

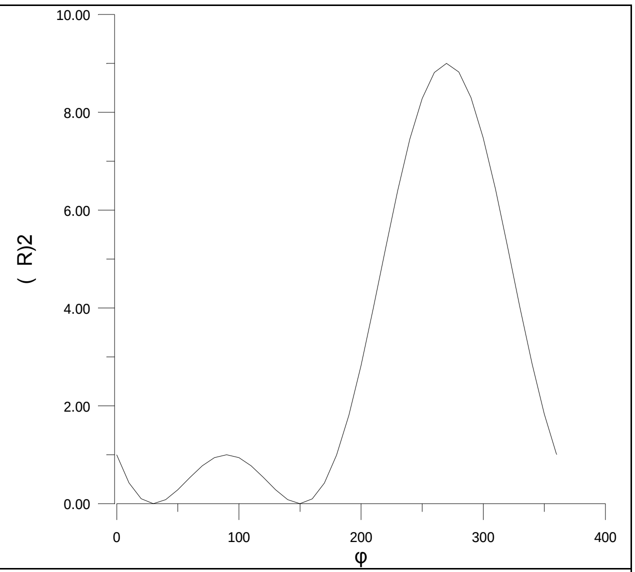
$$\boxed{\begin{aligned}\left(p_R\right)_{max} &= 1500\,Pa\\ \left(p_R\right)_{min} &= -3000\,Pa\end{aligned}}$$

<u>Σημείωση:</u> Η πίεση είναι μέγεθος θετικό. Στην συγκεκριμένη άσκηση προέκυψε αρνητική ελάχιστη πίεση δεδομένου ότι από λάθος εδόθη στην εκφώνηση της άσκησης πίεση $p_\infty = 1000\,Pa$ αντί της $p_\infty = 10000\,Pa$ που θέλαμε να δώσουμε. Όπως μπορεί να φανεί και από την εξίσωση του Bernoulli αλλά και από τις εξισώσεις Navier – Stokes δεν αλλάζει το πεδίο ταχυτήτων και οι δυνάμεις, εάν σε όλες τις

πιέσεις προστεθεί σταθερή πίεση αναφοράς. Επομένως για δεδομένη πίεση στο άπειρο $p_\infty = 10000\,\text{Pa}$ διαφοροποιούνται μόνο οι ζητούμενες πιέσεις που υπολογίζονται οτι είναι $(p_R)_{max} = 10500\,\text{Pa}$, $(p_R)_{min} = 6000\ \text{Pa}$.



Μεταβολή της ταχύτητας πάνω στην επιφάνεια του κυλίνδρου



Μεταβολή του τετραγώνου της ταχύτητας πάνω στην επιφάνεια του κυλίνδρου

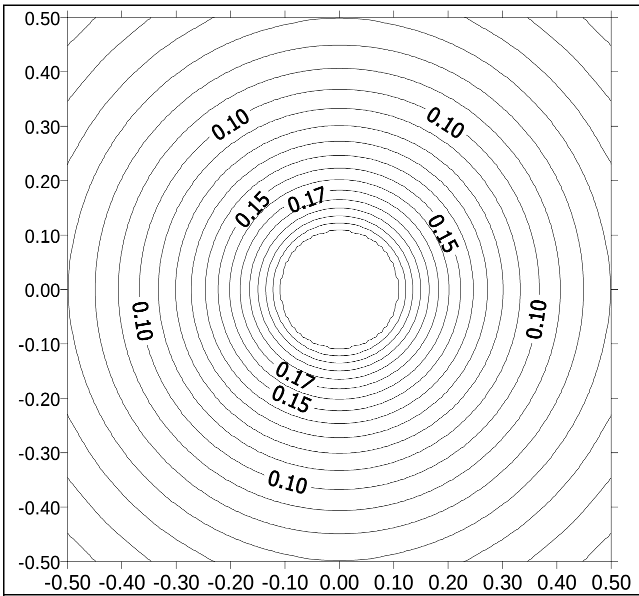
Γ) Για να μείνουν τα σημεία ανακοπής στην ίδια θέση (φ_o=σταθερή), όταν η ταχύτητα της παράλληλης ροής από U γίνει U_1=2U , θα πρέπει να αλλάξει και η κυκλοφορία από Γ σε Γ_1. Τότε η άνωση θα γίνει L_1. Θα ισχύουν οι κάτωθι σχέσεις :

$$\sin\varphi_o = \frac{\Gamma_1}{4\pi R U_1} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \Gamma_1 = 2\pi R U_1 = 4\pi R U$$

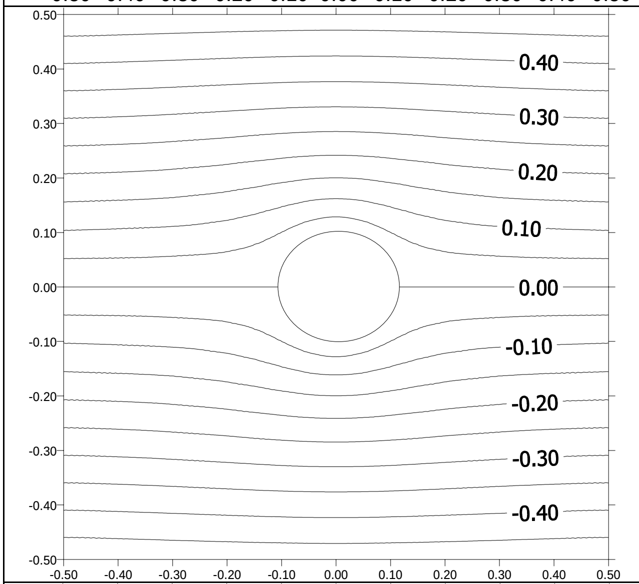
$$\Rightarrow \ L_1/b = -\rho\, U_1 \Gamma_1 = -8\pi\rho R U^2 = 4L/b = -800\pi\ \text{N/m}$$

$$\boxed{L_1/b = -800\pi\ \text{N/m}}$$

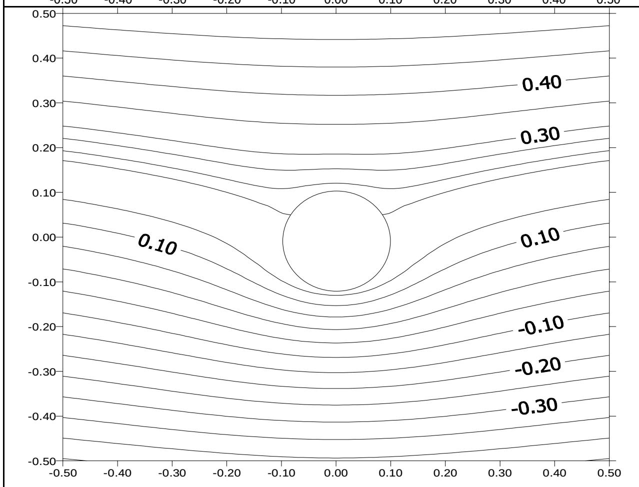
Δ) Στο κατωτέρω σχήμα απεικονίζονται τα πεδία της δίνης και του διπόλου εντός παράλληλης ροής, καθώς και το πεδίο που προκύπτει από την επαλληλία τους.



Σημειακή δίνη έντασης Γ= 0,2π



Επαλληλία παράλληλης ροής U=1m/s και διπόλου, με γραμμή ροής Ψ=0 τον κύκλο με R=0,1



Επαλληλία των προηγουμένων πεδίων.